INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1987. — Option MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Préliminaires.

On s'intéresse dans ce problème à l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$. Muni de l'addition des suites et de la multiplication par un scalaire réel, cet ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension infinie.

i. Soit $h = (h_j, j \in \mathbb{N})$ une suite réelle. On dit que cette suite satisfait une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre p à partir du rang q, $q \geqslant p$, si et seulement si il existe p réels $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ avec $\varphi_p \neq 0$ tels que :

$$(1) \qquad h_j + \varphi_1 h_{j-1} + \ldots + \varphi_p h_{j-p} = 0 \,, \forall\, j \geqslant q \,.$$

ii. Si $h = (h_j, j \in \mathbb{N})$ est une suite réelle, on peut lui associer la suite τh, dont le terme général est : $(\tau h)_j = h_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. Pour tout entier positif p, $p \geqslant 0$, on définit de manière analogue la suite $\tau^p h$ de terme général : $(\tau^p h)_j = h_{j+p}$, $j \in \mathbb{N}$.

iii. À une suite réelle : $h = (h_j, j \in \mathbb{N})$, on associe le tableau $\mathcal{H}$, dit « matrice de Hankel infinie », tableau comprenant une infinité de lignes $i = 1, 2, \ldots$, une infinité de colonnes $j = 1, 2, \ldots$ et dont le terme général d'indice (i, j) est h_{i+j-2}. Cette « matrice de Hankel » a la forme :

$$(2) \qquad \mathcal{H} = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \ldots \\ h_1 & h_2 & h_3 & . & \ldots \\ h_2 & h_3 & . & . & \ldots \\ h_3 & . & . & . & \ldots \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \end{vmatrix}$$

Sa i-ième ligne peut être identifiée à la suite $\tau^{i-1} h$, $i = 1, 2 \ldots$

iv. Soit $E(\mathcal{H})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ engendré par les suites $\tau^i h$, $i \in \mathbb{N}$. Si $E(\mathcal{H})$ est de dimension finie r, on dit que le rang de $\mathcal{H}$ est r et on note $\operatorname{rg} \mathcal{H} = r$. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{H}$ est de rang infini et on note $\operatorname{rg} \mathcal{H} = +\infty$.

I

I.1. Vérifier qu'il est équivalent de dire que la suite h satisfait une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre p à partir du rang q ou de dire que la suite $\tau^q h$ est combinaison linéaire des suites :

$$\tau^{q-1} h \,, \; i = 1 \ldots p \,.$$

I.2. Établir que, pour une telle suite satisfaisant une équation de récurrence linéaire homogène, la « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ est de rang fini.

I.3. Inversement montrer que si la « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ est de rang fini, la suite h satisfait une équation de récurrence linéaire homogène à partir d'un certain rang.

I.4. Étant donnés deux entiers strictement positifs p et n, $\mathcal{H}_{p,n}$ désigne la matrice de taille (p, n), de terme général h_{i+j-2}, $i = 1, 2 \ldots p$, $j = 1, 2 \ldots n$. Vérifier que : $\operatorname{rg} \mathcal{H} = \sup_{p, n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{rg} \mathcal{H}_{p,n}$.

I.5. Montrer que si la « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ est de rang fini r [$\operatorname{rg} \mathcal{H} = r$], les suites $\tau^i h$, $i = 0, 1, \ldots r-1$, associées aux r premières lignes de $\mathcal{H}$, forment une base de $E[\mathcal{H}]$.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
MZMath 2

II

Étant donnés un entier strictement positif K et trois matrices A, B, C de tailles respectives (K, K), (K, 1), (1, K), on considère le système d'équations de récurrence :

$$(2)\qquad \begin{cases} Z_t = A\,Z_{t-1} + B\,u_t \\ y_t = C\,Z_t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{N}$$

où : $u_t \in \mathbb{R}$, $y_t \in \mathbb{R}$, $Z_t \in \mathbb{R}^K$, $\forall\, t \in \mathbb{N}$, $Z_{-1} = 0$ par convention.

II.1. Vérifier que ce système d'équations définit un endomorphisme sur $\mathcal{S}$, qui à la suite $u = (u_t, t \in \mathbb{N})$ associe la suite $y = (y_t, t \in \mathbb{N})$. On appelle *système* cet endomorphisme et on le note S. Les données (K, A, B, C) constituent une *représentation du système* et K est la *dimension* de cette représentation.

II.2. *a.* Donner des exemples montrant qu'un même système admet une infinité de représentations, certaines de mêmes dimensions, d'autres de dimensions différentes.

b. Établir qu'il existe des représentations, dites *minimales*, correspondant à une valeur $\underline{K}$ de K la plus petite possible.

II.3. Vérifier que l'image y de u par le système S est telle que :

$$y_t = \sum_{j=0}^{t} h_j\, u_{t-j}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{N}$$

et donner la forme des coefficients h_j, $j \geqslant 0$. Cette suite $h = (h_j, j \in \mathbb{N})$ est dite *associée au système* S.

II.4. On introduit les deux « matrices infinies », dont les écritures blocs sont :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^j \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} = [B,\ AB,\ \ldots\ A^jB\ \ldots\ ].$$

$\mathcal{O}$ est donc de taille (∞, K) et $\mathcal{C}$ de taille (K, ∞).

Expliquer pourquoi il est possible de donner un sens à l'égalité : $\mathcal{H} = \mathcal{O}\,\mathcal{C}$.

Dans la suite nous appelons rang de $\mathcal{O}$, noté rg $\mathcal{O}$, la dimension du sous-espace engendré par les suites associées aux colonnes de $\mathcal{O}$ [respectivement : rg $\mathcal{C}$ = dimension du sous-espace engendré par les suites associées aux lignes de $\mathcal{C}$].

III

III.1. Vérifier qu'à tout système S correspond une suite h, dont la « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ a un rang inférieur ou égal à la dimension minimale $\underline{K}$ des représentations.

III.2. Soit h une suite, dont la « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ est de rang fini r. On pose :

$$z_{it} = \sum_{j=0}^{t} h_{j+i-1}\, u_{t-j}, \qquad i = 1, \ \ldots\ r.$$

a. Vérifier que le vecteur

$$Z_t = \begin{bmatrix} z_{1t} \\ z_{2t} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{rt} \end{bmatrix}$$

satisfait une relation de récurrence linéaire du type :

$$Z_t = A\,Z_{t-1} + B\,u_t,$$

où A et B sont des matrices que l'on précisera.

b. En déduire que toute suite h, dont la « matrice de Hankel » est de rang fini, est associée à un système.

c. Vérifier que la représentation du système qui a été mise en évidence est minimale et en déduire que rg $\mathcal{H} = r = \underline{K}$.

Tournez la page S. V. P.

IV.1. *a.* Soit M une matrice de taille (p, n) de plein rang colonne : rg M = n. Établir que la matrice ${}^tMM$, où ${}^tM$ désigne la matrice transposée de la matrice M, est inversible.

b. Donner un résultat similaire, lorsque la matrice M est de plein rang ligne : rg M = p.

IV.2. Montrer qu'une représentation [K, A, B, C] d'un système S est minimale, si et seulement si les matrices $\mathcal{O}$ et $\mathcal{C}$ sont telles que : rg $\mathcal{O}$ = rg $\mathcal{C}$ = K.

IV. 3. Soient M une matrice de taille (p, n) de rang K, P et $\tilde{P}$ deux matrices de taille (p, K), R et $\tilde{R}$ deux matrices de taille (K, n) telles que :

$M = PR = \tilde{P}\tilde{R}$.

a. Établir l'égalité : $R = ({}^tP\,P)^{-1}\,{}^tP\,\tilde{P}\,\tilde{R}$.

b. Vérifier que la matrice ${}^tP\,\tilde{P}$ est inversible.

c. En déduire l'existence d'une matrice Q inversible de taille K, telle que :

$P = \tilde{P}\,Q$ et $R = Q^{-1}\,\tilde{R}$.

IV.4. Soit $\mathcal{H}$ une « matrice de Hankel » de rang fini $r = \underline{K}$ et admettant une décomposition $\mathcal{H} = PR$, où P et R sont de tailles $(\infty, \underline{K})$ et $(\underline{K}, \infty)$

a. Utiliser la représentation minimale $[\underline{K}, A^*, B^*, C^*]$ trouvée en III.2. et le résultat de IV.3. *c.* pour montrer que les matrices P et R peuvent être écrites :

(3) $$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad R = [B,\ AB,\ A^2B\ \ldots\ ],$$

avec $C = C^*Q$, $B = Q^{-1}B^*$, $A = Q^{-1}A^*\,Q$, où Q est inversible de taille $\underline{K}$.

b. En remarquant que :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \ldots \\ h_2 & h_3 & \cdot & \ldots \\ h_3 & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} \quad \text{s'écrit} \quad \tilde{\mathcal{H}} = P\,A\,R,$$

expliquer comment trouver les matrices A, B, C introduites dans l'équation (3) à partir de la décomposition $\mathcal{H} = PR$.

c. En déduire qu'il existe une seul triplet (A, B, C) pour lequel la relation (3) est satisfaite.

IV.5. Soient $(\underline{K}, A^*, B^*, C^*)$ et $(\underline{K}, A, B, C)$ deux représentations minimales d'un même système S. Vérifier qu'il existe une matrice Q inversible de taille $\underline{K}$ telle que :

$$C = C^*Q, \quad B = Q^{-1}B^*, \quad A = Q^{-1}A^*Q.$$

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M'-Math 2
page 100 bis
1987

V

Dans cette dernière partie, on se propose de décrire une méthode pour décomposer une « matrice de Hankel » $\mathcal{H}$ de rang fini $r = \underline{K}$ sous la forme $\mathcal{H} = PR$ avec P de dimension $(\infty, \underline{K})$ et R de dimension $(\underline{K}, \infty)$.

V.1. Expliquer pourquoi il suffit de disposer d'une décomposition similaire pour la matrice $\mathcal{H}_{n,n}$:

$\mathcal{H}_{n,n} = P_n R_n$, avec n entier assez grand, P_n de taille $(n, \underline{K})$, R_n de taille $(\underline{K}, n)$.

V.2. Soit M une matrice carrée de taille n.

a. Établir que les matrices M^tM et ^tMM sont symétriques et associées à des formes quadratiques positives.

b. On note $\lambda_1^2 \geqslant \lambda_2^2 \ldots \geqslant \lambda_n^2$ les valeurs propres de M^tM rangées par ordre décroissant, U_j, $j = 1 \ldots n$ un système orthonormé de vecteurs propres associés.

Vérifier que la famille de vecteurs $V_j = \dfrac{^tM\,U_j}{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, n$, est un système orthonormé de vecteurs propres de ^tMM, associé au même ensemble de valeurs propres.

c. En déduire que la matrice M peut s'écrire :

$M = U \wedge {}^tV$, où U et V sont deux matrices orthogonales de taille (n, n) et $\wedge$ une matrice diagonale de taille (n, n).

V.3. Utiliser ce résultat pour obtenir une décomposition de la matrice $\mathcal{H}_{n,n}$ de rang r en $\mathcal{H}_{n,n} = P_n R_n$.

• • •